

数学 II スクーリング 第 2 回 報告課題 2

NHK 高校講座 参考動画

第 5 回 2 次方程式

- チャプター2 2 次方程式の解の種類

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140209_00000#in=87&out=480

● 解の公式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解きなさい
(1) $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

異なる 2 つの
実数解

● 判別式と解の種類

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の

判別式 $D = b^2 - 4ac$ と解について

$D > 0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解

$D = 0 \Leftrightarrow$ 重解 (重解も実数解)

$D < 0 \Leftrightarrow$ 異なる 2 つの虚数解

例 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解きなさい
(2) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 9 \times 1}}{2 \times 9} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

重解

ここまでの数学 I

例 次の 2 次方程式を解の公式を用いて解きなさい
(3) $4x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 32}}{8} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{-23}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{23}i}{8} \end{aligned}$$

異なる 2 つの
虚数解

なぜ、 $\sqrt{-23} = \sqrt{23}i$ か？
ではなく
 $\sqrt{-23}$ を $\sqrt{23}i$ と置き換えるという計算上のルール。

- チャプター5 チャレンジ 解と係数の関係を使ってみよう！

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140209_00000#in=960&out=1094

例 2 次方程式 $x^2 + 6x - 5 = 0$ の 2 つの解を a, β とするとき $a^2\beta + a\beta^2$ の値を求めなさい

解答

$$a + \beta = -\frac{6}{1} = -6, \quad a\beta = \frac{-5}{1} = -5$$

を利用して

$$a^2\beta + a\beta^2 = a\beta(a + \beta) = (-5) \times (-6) = 30$$

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の
2 つの解を a, β とすると

$$a + \beta = -\frac{b}{a}, \quad a\beta = \frac{c}{a}$$

2 次方程式の解と係数の関係

第6回 整式の除法と因数定理

• チャプター2 整数の除法

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140210_00000#in=158&out=382

• $2x^2 + 7x + 9$ を $x + 1$ でわってみよう

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \\ x + 1 \overline{) 2x^2 + 7x + 9} \\ \underline{2x^2 + 2x} \\ 5x + 9 \\ \underline{5x + 5} \\ 4 \end{array}$$

商 余り

$$2x^2 + 7x + 9 = (x + 1)(2x + 5) + 4$$

チャプター3 剰余の定理

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140210_00000#in=382&out=692

• $P(x)$ という記号

$P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ のとき

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^3 + 5 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + 2 \\ &= -1 + 5 - 3 + 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

川崎先生からのメッセージ

マイナスの数を代入するときは
符号のミスをしないように
() をつける

• 剰余の定理

$P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの商を $Q(x)$
余りを R とすると

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

と表すことができる

この式に $x = \alpha$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R \\ &= 0 \times Q(\alpha) + R \\ &= R \end{aligned}$$

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$$

$x - 1$ でわったときの余りは

$$P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 3 = 2$$

$$P(X) \div (x - 1) \rightarrow Q(x) \text{ 余り } R$$

$$P(X) = (x - 1)Q(x) + R \quad \text{これより } P(1) = R$$

• チャプター4 因数を用いた因数分解

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140210_00000#in=692&out=937

$P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの商を $Q(x)$
余りを R とすると

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

$P(x)$ を $x - \alpha$ でわったときの商を $Q(x)$
余りを R とすると

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

余りが0

この式で $P(\alpha) = 0$ のとき $R = 0$ であるから

$P(x)$ は $x - \alpha$ でわり切れる

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x)$$

$x - \alpha$ は $P(x)$ の因数となる

👉 この式さえ覚えておけば、後はなんとかなる！

• $x^3 + 2x^2 - x - 2$ を因数分解してみよう

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - \alpha)(x^2 + \square x + \triangle)$$

このように因数分解されると考えれば

$$\text{左辺の定数 } -2 \quad \text{右辺の定数 } -\alpha \times \triangle$$

$$-2 = -\alpha \times \triangle$$

$\triangle$ は定数 2 の約数 $\pm 1, \pm 2$ のどれかである

第7回 高次方程式

- チャプター3 複2次式と高次方程式の解法

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140211_00000#in=553&out=716


$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 - 4 &= 0 \\x^2 = X \text{ とおくと } X^2 + 3X - 4 &= 0 \\(X - 1)(X + 4) &= 0 \\(x^2 - 1)(x^2 + 4) &= 0 \\x^2 - 1 = 0 \text{ または } x^2 + 4 &= 0 \\x^2 = 1 \text{ より } x = \pm 1 \\x^2 = -4 \text{ より } x = \pm 2i\end{aligned}$$

👉 複2次式

と呼ばれる特殊な高次方程式

- チャプター4 因数定理を用いた高次方程式の解法

https://www2.nhk.or.jp/kokokoza/watch/?das_id=D0022140211_00000#in=716&out=1115

● 因数定理の復習



x の整式を記号 $P(x)$, $Q(x)$ であらわす
 $x = \alpha$ のときの $P(x)$ の値を $P(\alpha)$ と書く

$$P(x) \text{ が } x - \alpha \text{ を因数に持つならば}$$
$$\underline{P(x) = (x - \alpha)Q(x)}$$
$$x = \alpha \text{ のとき } P(\alpha) = 0 \text{ となる}$$
$$\boxed{P(\alpha) = 0}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ の因数}}$$

+-の違いに注意しよう！

$P(x)$

$P(1) = 0$ ならば

$P(x)$ は $x - 1$ を因数に含む

$P(-2) = 0$ ならば

$P(x)$ は $x + 2$ を因数に含む


$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 7x + 10 &= 0 \\P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10 \text{ とおくと} \\P(x) \text{ が } x - \alpha \text{ という因数をもつならば} \\P(x) &= (x - \alpha)Q(x) \\\alpha &= \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\end{aligned}$$

定数項10の約数を+-で試してみる。


$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 7x + 10 &= 0 \\P(1) &= 1^3 - 4 \times 1^2 - 7 \times 1 + 10 = 0 \\x - 1 &\text{ は } P(x) \text{ の因数}\end{aligned}$$

絶対値の小さい数から試していく

これが定石


$$\begin{aligned}x^3 - 4x^2 - 7x + 10 &= 0 \\P(x) &= (x - 1)(x^2 - 3x - 10) \\(x - 1)(x^2 - 3x - 10) &= 0 \\(x - 1)(x + 2)(x - 5) &= 0 \\したがって \quad x &= 1, -2, 5\end{aligned}$$